

# Dinámica no lineal del mercado del café en Colombia

## Non-linear Dynamics of the Coffee Market in Colombia

**Cristian Felipe Jiménez Varón**

Ingeniero Químico e Industrial de la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales  
Grupo de Investigación en Física y Matemáticas con Énfasis en la Formación de Ingenieros  
Profesor de la Universidad Autónoma de Manizales, Colombia  
<https://orcid.org/0000-0001-7471-3845>  
[cristian.jimenezv@autonoma.edu.co](mailto:cristian.jimenezv@autonoma.edu.co)

**Reinel Tabares Soto**

Ingeniero Electrónico de la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales, Ingeniero en Sistemas  
y Computación de la Universidad de Caldas,  
Msc Ingeniería de la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales, Colombia  
Grupo de Investigación Automática  
Profesor de la Universidad Autónoma de Manizales, Colombia  
<https://orcid.org/0000-0002-4978-5211>  
[rtabares@autonoma.edu.co](mailto:rtabares@autonoma.edu.co)

Fecha de recepción: 1 de noviembre de 2018

Fecha de aceptación: 22 de noviembre de 2018

Sugerencia de citación: Jiménez Varón, C. F., y Tabares-Soto, R. (2018). Dinámica no lineal del mercado del café en Colombia. *Mutis*, 8(2), en prensa, doi: <http://dx.doi.org/10.21789/22561498.1405>

### RESUMEN

El presente artículo tiene como objetivo modelar las variables de oferta, demanda y *stock* del mercado del café verde colombiano comercializado como *commodity*. A partir de estas variables se formula un modelo de sistemas dinámicos usando ecuaciones diferenciales ordinarias, las cuales permiten observar el comportamiento del mercado de este producto. El análisis realizado tiene en cuenta algunos parámetros, como las tasas de exportación e importación, estimados a partir de datos históricos sobre el mercado del café, los cuales fueron reportados por las entidades oficiales. En el documento se muestra la formulación del modelo, seguido por el cálculo de los puntos de equilibrio y su estabilidad. Por último, se presenta la simulación de las variables de estado.

**Palabras clave:** sistemas dinámicos, modelo matemático, mercado del café

## **ABSTRACT**

The objective of this paper is to model the supply, demand and stock variables of the Colombian green coffee market commercialized as a commodity. Based on these variables, a model of dynamic systems is formulated using ordinary differential equations, which allow observing the behavior of the Colombian coffee market. The analysis takes into account some parameters, such as export and import rates, estimated from historical data on the coffee market reported by official entities. The document shows the formulation of the model, followed by the calculation of the equilibrium points and their stability. Finally, simulation of state variables is presented.

**Keywords:** Dynamical systems, mathematical model, coffee market

## INTRODUCCIÓN

En la actualidad, el mercado del café presenta un comportamiento volátil en el tiempo debido a las variables que definen su economía. A causa de esto, en las últimas décadas, entidades estatales y privadas han desarrollado diferentes investigaciones enfocadas al análisis económico del mercado del café. Estas, en su mayoría, han sido investigaciones sociales, económicas y de mercadeo. Sin embargo, desde el campo de los sistemas dinámicos no se encuentran suficientes reportes sobre el tema.

El presente artículo plantea un modelo del mercado del café colombiano construido a partir del análisis de su panorama nacional e internacional. Este trabajo lleva a cabo un estudio de tipo cualitativo con ecuaciones diferenciales, con el objetivo de generar información que pueda ser de utilidad para los agentes que toman decisiones en dicho mercado.

Las variables involucradas en el modelado son: la demanda nacional (caracterizada por el consumo tradicional del café a nivel doméstico), la demanda internacional (proveniente en su mayoría de países norteamericanos y algunos europeos, como Alemania), la oferta nacional, las importaciones de café para abastecer parte de la demanda local y el *stock* de café (bodegas y almacenamiento debido a periodos de cosecha y de recepción de cultivos previo a su exportación o comercialización en el mercado nacional) (Lis Gutiérrez *et-al*, 2012).

Después del presenta apartado introductorio, el documento se organiza de la siguiente manera: la segunda sección explica la construcción del modelo propuesto; el tercer apartado presenta el cálculo de puntos de equilibrio y el análisis de estabilidad; la cuarta sección muestra las simulaciones del modelo; y la quinta sección expone las conclusiones generadas a partir de los hallazgos de esta investigación.

## CONSTRUCCIÓN DE UN MODELO DEL MERCADO ECONÓMICO DEL CAFÉ: INVERSIÓN CONSTANTE EN LA OFERTA

En esta sección se expondrán los elementos necesarios para comprender las características más relevantes sobre el mercado económico del café arábigo colombiano. Además, se formulará un modelo matemático que desde los sistemas dinámicos permita abstraer características de la realidad del mercado económico del café en Colombia. El modelo estará formado por tres ecuaciones diferenciales correspondientes a las variables de oferta, demanda y *stock*. Posteriormente, se considerará una ecuación para la variable ventas, la cual se encuentra implícita en la ecuación de *stock*. Una vez formulado el modelo, se realizarán los cálculos correspondientes a los puntos de equilibrio y el análisis de su estabilidad. Finalmente, se estudiarán los retratos de fase del sistema.

Teniendo en cuenta que Osorio, Aramburo & Morales (2011) sostienen que es relevante considerar que la construcción del modelo y su interpretación se encuentran influenciados por la relación de las variables del mismo, el sistema construido para esta investigación se basa en experiencias anteriores para modelar diferentes mercados económicos. Adicionalmente, como base del modelo presentado, se considerará el modelo propuesto por (Valencia Calvo, *et-al*, 2016), el cual fue aplicado al sector eléctrico colombiano.

## Consideraciones generales sobre el modelo

Las variables consideradas en este trabajo corresponden a políticas actuales del mercado económico del café colombiano, el cual es comercializado como *commodity*. A continuación, se mencionan algunas consideraciones para el modelamiento propuesto:

- El modelo considera tres variables de estado: la oferta, la demanda y el *stock*.
- El modelo considera únicamente el café verde colombiano comercializado como *commodity*.
- Como hipótesis de formulación del modelo, se consideró la variación del precio como constante, es decir, no se considerará el precio como variable de estado del modelo aquí descrito.
- La estimación de los parámetros necesarios para el modelo (tasas de exportación, importación y ventas) son tomados de datos históricos reportados por entidades oficiales de información del café tales como la Federación Nacional de Cafeteros (FNC) y la Organización Internacional del Café (OIC).

## Caracterización de las variables del modelo

### ***La oferta de café de Colombia***

En el mercado económico del café de Colombia, la oferta es definida como el total de la producción de un año cafetero específico (ICO, 2011). Por su parte, la oferta exportable corresponde a la oferta total descontando el consumo nacional y las existencias, las cuales son necesarias para mantener el flujo de exportaciones, considerando que 80 % del café producido en Colombia tiene como destino los mercados de exportación. Adicionalmente, con el fin de abastecer la demanda interna, es importante señalar que dentro del inventario se tienen en cuenta las existencias de años anteriores (o cosechas no vendidas) y las importaciones (Domínguez, 2013).

### ***Demanda del mercado del café***

En Colombia, la demanda del mercado del café se ve influenciada por dos grandes factores: el mercado internacional, y la demanda interna para su consumo doméstico. Dicha demanda incluye la compra de café verde a otros países productores para abastecer el consumo interno, el cual ha mantenido una tendencia creciente en los últimos años (Uu & Nam, 2017).

### ***El stock de café***

En cuanto a las existencias de café, la OIC hace una diferencia entre existencias retenidas en países importadores (las cuales comúnmente se denominan inventarios) y las existencias retenidas en países productores (conocidas simplemente como existencias o *stock*) (ICO, 2011).

Según (Lis Gutiérrez *et-al*, 2012), con base en reportes de la OIC, las existencias totales a escala global pasaron de representar 31,58 % en 2005/06 a 17,03 % en 2009/10, cuya mayor parte correspondió a las existencias de arábica con respecto a la producción de esta misma variedad (37,62 % y 21 %, en 2005/06 y 2009/10, respectivamente). Además, estos autores indican que la tendencia decreciente de las existencias puede ser resultado del incremento

en el precio internacional antes de 2012; hecho que incentivó las exportaciones, al igual que el consumo interno de los países productores, el cual incrementó 3,6 %.

## **Modelo matemático: ecuaciones del modelo**

### ***Ecuación de la oferta***

Según la (FNC & Colombia, 2014), el parque cafetero llegó en 2015 a 941.000 hectáreas conformadas por 4.835 millones de árboles plantados, alcanzando una densidad de siembra de 5.484 árboles por hectárea y una edad promedio de 7,1 años. Actualmente, el 97 % de las plantaciones son tecnificadas, el 83 % están en etapa joven y 85 % se encuentra en edad productiva (más de 2 años). Además, 71 % se encuentran sembradas con variedades resistentes a la roya.

A continuación, se expone la ecuación para la oferta del café arábigo colombiano comercializado como *commodity*. Este análisis se lleva a cabo desde dos perspectivas: la producción generada por la capacidad e infraestructura interna y las importaciones de café crudo para comercialización interna. La ecuación de oferta se muestra a continuación:

$$\dot{x}_1 = -rx_1 + \frac{c}{x_1}, \quad x_1 \neq 0 \quad (\text{Ec. 1})$$

donde,  $r \in \mathbb{R}^+$  corresponde a la tasa de descenso de la producción,  $x_1 \in \mathbb{R}^+$  representa la oferta y  $c \in \mathbb{R}^+$  la tasa de café importado. En esta ecuación, la tendencia se considera en descenso a una tasa constante, denominada  $r$ , pues ante una afectación fuerte por alguna enfermedad sobre los cultivos estos tenderían a desaparecer

La ecuación de la oferta tiene en cuenta dos componentes. El primero está relacionado con la producción generada con la capacidad instalada interna. Este factor es atribuido a las zonas de cultivo de café arábigo dentro del terreno colombiano y es influenciado en el tiempo por diferentes factores, tales como la broca, la roya y la edad de las siembras, variables que afectan los cultivos y, por ende, la capacidad de producción que finalmente conforma la oferta de café colombiano. Por otra parte, el segundo componente que define la oferta es la tasa de importaciones de café verde comprado a otros países productores para satisfacer la demanda interna, lo cual resulta de gran relevancia, considerando que, aunque Colombia es un país productor, durante la última década las tasas de importación de este producto se han ubicado por encima del 80 % del café consumido a nivel nacional, de acuerdo con informes de medios nacionales (Domínguez, 2013).

### ***Inversión en la oferta***

Por su parte, la oferta es analizada desde dos componentes: la capacidad instalada interna de producción y el café importado para consumo interno. Como tercer elemento, que se incorpora a la ecuación de oferta un término lineal correspondiente a la inversión, ya sea realizada por entes gubernamentales o no, lo cual permite mejorar la capacidad de producción.

La ecuación para la inversión de la oferta se muestra a continuación:

$$\dot{x}_1 = -rx_1 + \frac{c}{x_1} + \lambda Y \quad (\text{Ec. 2})$$

donde,  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  corresponde al factor de conversión para la inversión en la oferta y  $Y \in \mathbb{R}^+$  a la inversión en infraestructura interna para la producción de café.

### ***Ecuación de la demanda***

La ecuación de la demanda se construye a partir de dos panoramas: el nacional, constituido por políticas de consumo local, y el internacional, caracterizado por las políticas de exportación del café arábigo colombiano a diferentes clientes. La ecuación de demanda se muestra a continuación:

$$\dot{x}_2 = ax_2 \left(1 - \frac{x_2}{w_1}\right) + bx_2 \left(1 - \frac{x_2}{w_2}\right), \quad w_1, w_2 \neq 0 \quad (\text{Ec. 3})$$

donde,  $x_2 \in \mathbb{R}^+$  corresponde a la demanda,  $a \in \mathbb{R}^+$  es la tasa de consumo interno,  $b \in \mathbb{R}^+$  es la tasa de producción de café para exportación,  $w_1 \in \mathbb{R}^+$  es la capacidad máxima de demanda nacional (demanda interna) y  $w_2 \in \mathbb{R}^+$  la capacidad máxima de demanda internacional (demanda externa).

El primer término del miembro derecho corresponde a la demanda nacional de café verde que se comercializará para el consumo doméstico de Colombia, el cual llegó a 1,7 millones de sacos en 2015, con un incremento cercano a 4 % frente a 2014 (FNC & Colombia, 2014). Este incremento se explica por un aumento en el segmento de los consumidores jóvenes y una mayor frecuencia de consumo diario tanto dentro como fuera del hogar. El segundo término corresponde a la demanda internacional, cuyos principales destinos son Estados Unidos (41,7 %), seguido de Europa (32,4 %) y Japón (10,5 %); este último es considerado el principal cliente para los cafés especiales (Federación Nacional de Cafeteros, 2014). Adicionalmente, resulta pertinente mencionar que la demanda internacional de café representa más del 80 % de la producción nacional y que esta mantiene una baja tasa de cambio (parámetro  $b$ ), pues generalmente la demanda variable está concentrada en el mercado local y la tasa de cambio de la demanda para consumo interno es mayor con respecto a la producción (parámetro  $a$ ).

Con el fin de simplificar la ecuación para la demanda, se tiene que la capacidad de demanda máxima  $w$  es en total la demanda interna y la externa,  $w = w_1 + w_2$ ; sin embargo, esta última es prácticamente su totalidad, por lo cual la demanda máxima del modelo se puede aproximar a la demanda externa:  $w \approx w_2$ . Así, la ecuación simplificada de la demanda obtenida es:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= (a + b)x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w}\right), \quad w \neq 0 \\ \text{Si } \rho &= a + b & (\text{Ec. 4}) \\ \dot{x}_2 &= \rho x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w}\right), \quad w \neq 0 \end{aligned}$$

donde  $x_2 \in \mathbb{R}^+$  representa la demanda,  $a \in \mathbb{R}^+$  la tasa de consumo interno,  $b \in \mathbb{R}^+$  la tasa de producción de café para exportación y  $w \in \mathbb{R}^+$  la capacidad máxima de la demanda.

### ***Ecuación del stock***

Es importante resaltar que la variación de la producción total se ve afectada por las ventas como puede evidenciarse en la siguiente fórmula:

$$\underbrace{\dot{x}_3 + \dot{x}_1}_{\text{Variación de la producción total}} = \underbrace{-Lx_4}_{\text{ventas}}$$

De esta manera, es posible generar la siguiente ecuación:

$$\dot{x}_3 = -\dot{x}_1 - Lx_4 \quad (\text{Ec. 5})$$

donde,  $x_3 \in \mathbb{R}$  corresponde a la variable stock,  $x_1 \in \mathbb{R}^+$  a la oferta,  $L \in \mathbb{R}^+$  a la tasa de ventas y  $x_4 \in \mathbb{R}$  a las ventas.

### **La comercialización del café verde: las ventas**

En el proceso de comercialización del café intervienen diferentes agentes del mercado, quienes ocupan un papel importante dentro de la cadena de valor de este producto. La FNC y el estudio de (Lis Gutiérrez *et-al*, 2012), particularmente, mencionan que los principales agentes del mercado son:

- *Caficultores*. La FNC considera a un caficultor como el propietario o poseedor de un predio que cumpla con las siguientes condiciones: i) poseer un área sembrada igual o superior a media hectárea; y que el área señalada cuente con al menos 1.500 árboles plantados (Lis Gutiérrez *et-al*, 2012).
- *Exportadores*. Dentro del mercado del café colombiano, se consideran exportadores a todas aquellas firmas que se encargan de la actividad de comercialización extranjera del café verde, el café procesado o cafés especiales producidos en Colombia.
- *Empresas torrefactoras*. En el mercado del café colombiano, las empresas torrefactoras son aquellas encargadas de los procesos de adecuación de los granos, descascarillado, tostión y molido del café.

(Lis Gutiérrez *et-al*, 2012), con base en cifras de la OIC (2011) y la FNC (Federación Nacional de Cafeteros, 2011), mencionan que en 2012 existía un total de 96 firmas exportadoras, las cuales se localizaban en el 42,4 % de los departamentos (14 de los 33), con un mayor presencia en la ciudad de Bogotá y el departamento de Caldas. La mayoría de dichas firmas exportan café verde (84 de las 96), 50 exportan café tostado y 13 café soluble.

En el año cafetero 2016-17, la producción cafetera colombiana, permaneció constante de 14,2 millones de sacos anuales, este comportamiento también lo mantuvo el nivel de consumo interno, el cual estuvo en un valor de 1,7 millones de sacos. Finalmente se observó un leve aumento en el nivel de importaciones para consumo interno, el cual paso de 0,3 millones de sacos en 2016 a 0,4 millones de sacos en 2017, cifra que no se daba desde el 2014, lo cual evidenció un aumento en el nivel de exportaciones para el 2017 hacia los 13 millones de sacos anuales. (Federación Nacional de Cafeteros, 2017)

### **La ecuación de ventas**

La ecuación que modela el comportamiento de las ventas de café se construye a partir del análisis de dos escenarios.

En el primero, el mercado del café tiene una baja demanda (variable  $x_2$ ) y tanto la oferta (variable  $x_1$ ) como el *stock* (variable  $x_3$ ) superan con exceso la demanda del momento. Esta situación ( $x_2 < x_1 + x_3$ ) se caracteriza por una disponibilidad de existencias para ser agotadas y una alta producción con respecto a la demanda, la cual controla las ventas. Además, se señala que el precio de venta es denominado normal (parámetro  $p_n$ ), pues deben bajar los precios de venta para que se dé la comercialización para así agotar las existencias de inventario y posteriormente la producción.

En el segundo, la demanda es alta y la oferta y el *stock* no alcanzan a satisfacer la demanda de café del momento. Esta situación ( $x_2 > x_1 + x_3$ ) se caracteriza por una demanda alta, por lo tanto, el *stock* y la oferta no alcanzan a satisfacerla, ya que éstas últimas definen el proceso de ventas que corresponden a la capacidad de responder la demanda. Así mismo, el precio de venta es denominado alto (parámetro  $p_h$ ), pues el proceso de venta se realiza con el mejor postor, aprovechando la situación de escasez del producto.

Con base a los escenarios mostrados, se obtiene la siguiente ecuación:

$$x_4 = \begin{cases} p_n x_2 & \text{si } x_2 < x_1 + x_3 \\ p_h (x_1 + x_3) & \text{si } x_2 > x_1 + x_3 \end{cases} \quad (\text{Ec. 6})$$

donde,  $p_n \in \mathbb{R}^+$  es el precio normal de venta,  $p_h \in \mathbb{R}^+$  el precio alto de venta,  $x_1 \in \mathbb{R}^+$  la oferta,  $x_2 \in \mathbb{R}^+$  representa la demanda,  $x_3 \in \mathbb{R}$  el *stock* y  $x_4 \in \mathbb{R}$  las ventas.

### **Modelo matemático condensado**

La tabla 1 presenta el modelo matemático condensado del mercado del café de Colombia para las variables de estado: oferta, demanda y *stock*.



**Tabla 1.** Modelo condensado del mercado del café de Colombia

<b>Ecuación de oferta</b>	$\dot{x}_1 = -rx_1 + \frac{c}{x_1}$ <i>con</i> $x_1 \neq 0$
<b>Ecuación de demanda</b>	$\dot{x}_2 = ax_2 \left(1 - \frac{x_2}{w_1}\right) + bx_2 \left(1 - \frac{x_2}{w_2}\right)$ <i>con</i> $w_1, w_2 \neq 0$
<b>Ecuación simplificada de la demanda</b>	$\dot{x}_2 = (a + b)x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w}\right)$ <i>con</i> $w \neq 0$
<b>Ecuación del Stock</b>	$\dot{x}_3 = -\dot{x}_1 - Lx_4$
<b>Ecuación de ventas</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Si <math>x_2 &lt; x_1 + x_3</math> <math>x_4 = p_n x_2</math></li> <li>- Si <math>x_2 &gt; x_1 + x_3</math> <math>x_4 = P_h(x_1 + x_3)</math></li> </ul>

*Fuente:* elaboración propia.

### Parámetros utilizados en el modelo

En la tabla 2 se presenta el listado de parámetros utilizados en la formulación del modelo, las descripciones, valor y unidad de cada uno, los cuales son punto de referencia para todos los análisis realizados en las secciones posteriores.

Es necesario tener presente que los parámetros son determinados a partir de datos históricos reportados por organismos oficiales del sector cafetero, tales como la Federación Nacional de Cafeteros (FNC) y la Organización Internacional del Café (OIC). En la tabla 2 vemos una explicación más detallada sobre la obtención de estos parámetros.

**Tabla 2.** Parámetros del modelo del mercado del café de Colombia para las variables de estado: oferta, demanda y *stock*

Parámetro	Definición	Símbolo	Valor estimado	Unidad
Tasa de descenso de la producción	Caída de la producción debido a factores ajenos a la capacidad instalada.	$r$	0,2962	Millones de sacos de 60 kg/millones de sacos de 60 kg (adimensional)
Tasa de consumo interno	Expresa la cantidad de la demanda de café que se vende en el interior del país.	$a$	2,2559	Millones de sacos de 60 kg/millones de sacos de 60 kg (adimensional)
Tasa de producción de café para exportación	Expresa la cantidad de café demandada a nivel internacional.	$b$	0,0304	Millones de sacos de 60 kg/millones de sacos de 60 kg (adimensional)
Tasa de café importado	Expresa la cantidad de café que llega al país para consumo interno (importación).	$c$	0,116	Millones de sacos de 60 kg/millones de sacos de 60 kg (adimensional)
Tasa de ventas	Crecimiento o decrecimiento de las ventas de café por cualquier fuente (mercado externo o interno).	$L$	0,002546	Millones de sacos de 60 kg/millones de sacos de 60 kg (adimensional)
Factor de conversión para inversión en la oferta	Conversión para la inversión en la oferta	$\lambda$	0,00252	Millones de sacos de 60 kg/millones de dólares
Inversión en infraestructura interna para la producción de café	Inversión en capacidad instalada interna de producción.	$Y$	2.000	Millones de dólares
Precio normal	Precio normal para la función de ventas.	$p_n$	108.68	USD cent/lb
Precio alto	Precio alto para la función de ventas.	$p_h$	169.79	USD cent/lb
Capacidad máxima de demanda	Capacidad máxima de demanda para Colombia.	$w$	20	Millones de sacos de 60 kg

Fuente: elaboración propia.

## CÁLCULO DE PUNTOS DE EQUILIBRIO

En esta sección se muestran los cálculos de puntos de equilibrio del modelo propuesto en este artículo únicamente para la región  $x_2 < x_1 + x_3$ .

Tomando en cuenta el modelo,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -rx_1 + \frac{c}{x_1} + \lambda Y \\ \dot{x}_2 = (a + b)x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w}\right) \\ \dot{x}_3 = -\dot{x}_1 - Lx_4 \end{cases} \quad (\text{Ec. 7})$$

junto con

$$x_4 = \begin{cases} p_n x_2 & \text{si } x_2 < x_1 + x_3 \\ p_h (x_1 + x_3) & \text{si } x_2 > x_1 + x_3 \end{cases} \quad (\text{Ec. 8})$$

Para calcular los puntos de equilibrio se procede a resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} 0 &= -rx_1 + \frac{c}{x_1} + \lambda Y \\ 0 &= (a + b)x_2 \left(1 - \frac{x_2}{w}\right) \\ 0 &= -\dot{x}_1 - Lx_4 \end{aligned} \quad (\text{Ec. 9})$$

Se debe observar que al estar representada la variable  $x_5$  (ventas) como una función definida a tramos, los puntos de equilibrio a obtener estarían en dos regiones. En esta sección, solo se considerarán los puntos de equilibrio encontrados en la región donde  $x_2 < x_1 + x_3$ , obteniendo así los siguientes puntos de equilibrio:

$$(x_1^*, 0, -x_1^*)$$

$$(x_1^{**}, 0, -x_1^{**})$$

$$(x_1^*, w, -x_1^*)$$

$$(x_1^{**}, w, -x_1^{**})$$

donde,

$$x_1^* = \frac{-\lambda Y + \sqrt{\lambda^2 Y^2 - 4rc}}{-2r}$$

y

$$x_1^{**} = \frac{\lambda Y + \sqrt{\lambda^2 Y^2 + 4rc}}{2r}$$

Además, al evaluar el valor de los parámetros se tiene:

$$\begin{aligned} p_1 &= (-0.02, 0, 0.02) \\ p_2 &= (17.03, 0, -17.03) \\ p_3 &= (-0.02, 20, 0.02) \\ p_4 &= (17.03, 20, -17.03) \end{aligned}$$

Al respecto, se debe tener en cuenta que, al estar los puntos de equilibrio en la región  $x_2 > x_1 + x_3$  y al considerar que en el equilibrio  $x_1 = x_3$ , los puntos de equilibrio  $P_1$  y  $P_2$  son virtuales, puesto que se encuentran en la superficie de conmutación (Colombo, *et-al*, 2012) (di Bernardo *et al.*, 2007)(Escobar, 2013).

Los puntos de equilibrio  $p_1$  y  $p_3$  no pueden ser aplicados a la realidad de este mercado, pues la oferta no puede adquirir valores negativos; es decir, estos puntos de equilibrio son no admisibles (Bernardo *et al.*, 2007, 2008; (Redondo Ortégón, 2012).

### Determinación de la estabilidad de los puntos de equilibrio calculados

Considerando los puntos de equilibrio determinados en la sección anterior, se procede a determinar la estabilidad de los mismos, haciendo uso de la matriz jacobiana y de los teoremas de estabilidad expuestos en Bernardo *et al.* (2008) y (Leine & van Campen, 2006).

La matriz jacobiana del modelo expuesto en este artículo, ser representa como:

$$J(x_1, x_2, x_4) = \begin{pmatrix} -r - \frac{c}{x_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & (a+b) - 2\frac{(a+b)}{w}x_2 & 0 \\ r + \frac{c}{x_1^2} - p_h L & 0 & -Lp_h \end{pmatrix} \quad (\text{Ec. 10})$$

obteniendo los siguientes valores propios:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -Lp_h \\ \lambda_2 &= -r - \frac{c}{x_1^2} \\ \lambda_3 &= (a+b) - x_2 \left( \frac{2(a+b)}{w} \right) \end{aligned}$$

Al evaluar los valores de los parámetros y determinar el signo de los valores propios se obtiene que  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son siempre negativos y que la estabilidad va a depender de  $\lambda_3$ :

- Para el punto de equilibrio  $p_2$  se tiene:  $\lambda_3 > 0$  correspondiente a un punto de silla.
- Para el punto de equilibrio  $p_4$  se tiene:  $\lambda_3 < 0$  correspondiente a un punto de equilibrio estable.

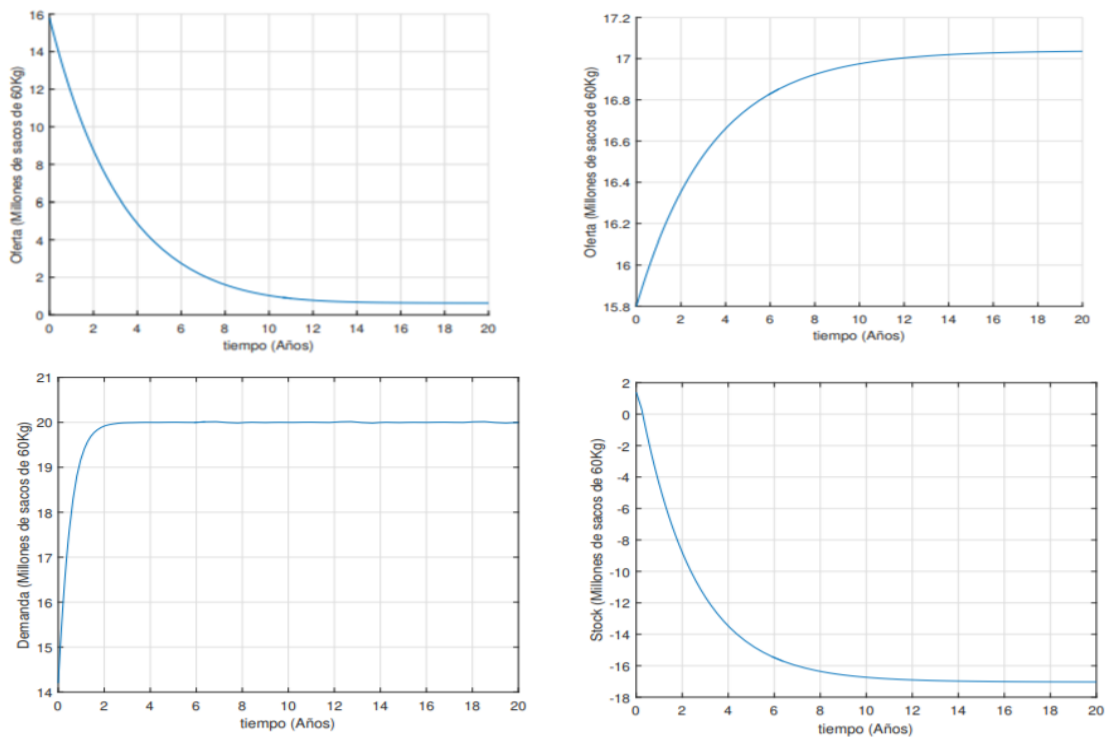
Los puntos de equilibrio  $p_1$  y  $p_3$  al ser no admisibles, no son incluidos en el análisis de estabilidad.

## SIMULACIONES Y ANÁLISIS DEL MODELO OBTENIDO

A continuación, se muestran algunas simulaciones y análisis para el modelo obtenido. Las simulaciones fueron realizadas para el sistema de ecuaciones diferenciales expuesto en la tabla 1, mediante el programa MATLAB®. Para la solución de las ecuaciones diferenciales se utiliza la función ODE45 que ya está implementada en dicha herramienta (Tabares Soto, 2016).

A partir de una condición inicial, se grafica el comportamiento que presenta las diferentes variables de estado del problema. Para la variable oferta se generó la simulación sin tener en cuenta la inversión, incorporando posteriormente este parámetro en el modelo (figura 1).

**Figura 1:** Simulaciones numéricas respecto del tiempo de las variables oferta sin inversión (superior izquierda), oferta con inversión (superior derecha), demanda (inferior izquierda) y *stock* (inferior derecha)



Fuente: elaboración propia.

Considerando el desgaste de la oferta debido a factores como enfermedades de los cultivos y mantenimientos en la industria, entre otros, tanto el gremio cafetero como el Gobierno Nacional se ven en la necesidad de invertir para asegurar que la producción en este sector alcance los niveles esperados y así evitar que su comportamiento en el tiempo sea decreciente y presente tendencias a la desaparición.

Teniendo en cuenta que el mercado del café se caracteriza por su rápido dinamismo, las tasas de inversión en este sector se hacen cada vez más elevadas, en la medida que la dinámica de comercialización se agiliza como resultado del desgaste de los cultivos, los equipos y la maquinaria. En general, la industria cafetera es cada vez mayor, por lo que las iniciativas de inversión que pretenden mejorar la oferta son un factor relevante para este sector.

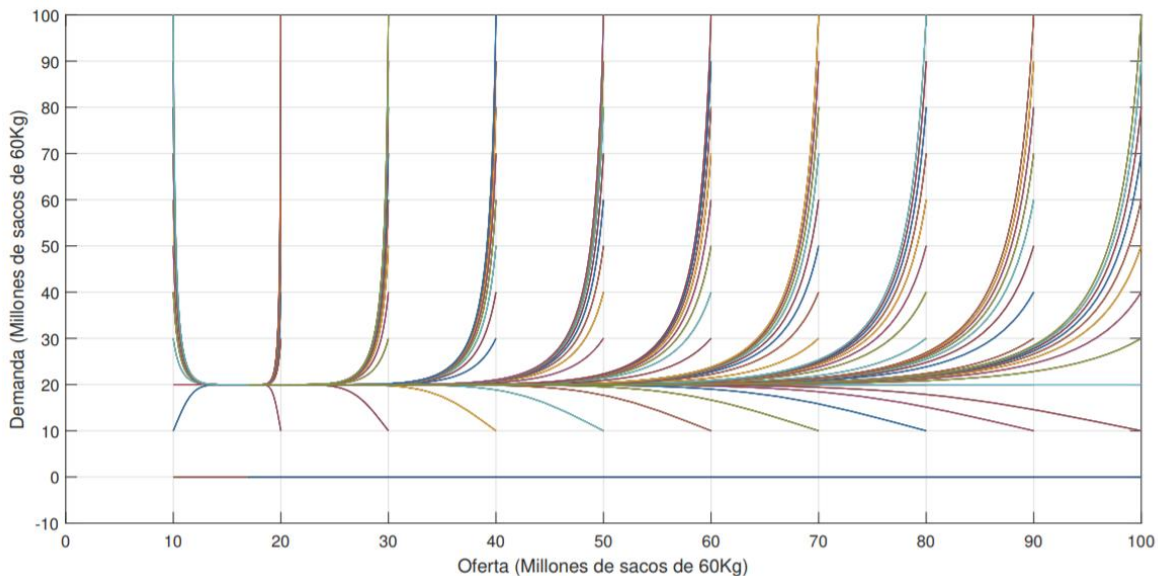
En cuanto a la demanda, se puede observar un comportamiento creciente de tipo logístico. En la figura 1 se observa que la variable crece hasta su valor máximo, determinado por el parámetro  $w$ , el cual está constituido por la demanda nacional más la internacional, siendo esta última superior al 80 % del total (Uu & Nam, 2017).

Finalmente, la variable *stock* evidencia inicialmente la disminución de los inventarios disponibles hasta ser agotados. Prontamente, se da la aparición de inventarios negativos, lo cual es explicado por el aumento de la demanda y las ventas efectivas. El inventario negativo representa las ventas que se darán debido a las mejoras en la capacidad instalada, lo que compromete ventas a futuro.

### Retrato de fase para las variables oferta y demanda

Se muestra el retrato de fase para el modelo en cuanto a las variables de estado oferta y demanda, con el objetivo de interpretar el flujo que adoptan las diferentes trayectorias del sistema al partir de un conjunto arbitrario de condiciones iniciales. En la figura 2 se presenta el retrato de fase para las variables oferta y demanda, en el cual se puede observar cómo, a partir de distintas condiciones iniciales, el flujo lleva al sistema a conseguir un punto de equilibrio de tipo estable aproximadamente en la coordenada (17, 20) correspondiente al punto de equilibrio obtenido para el modelo.

**Figura 2.** Retrato de fase de las variables oferta y demanda



Fuente: elaboración propia.

## CONCLUSIONES

Este trabajo presentó una revisión detallada de las principales variables que afectan el mercado económico del café colombiano, con el propósito de identificar las características más relevantes del mercado presentadas en el modelo tridimensional planteado para las variables oferta, demanda y *stock*.

Por medio de la solución del modelo, se mostraron diferentes análisis para cada una de las variables. Para la oferta ( $x_1$ ), se observó que la producción representa un componente con gran influencia sobre el mercado, ya que la capacidad instalada interna adquiere un comportamiento decreciente en el tiempo, lo que indica que en un tiempo finito la oferta tiende a desaparecer debido a cuestiones de mantenimiento y falta de inversión.

Posteriormente, se incorporó un término lineal correspondiente a una inversión constante con el objetivo de modificar el comportamiento de la oferta. Luego, se encontró que la demanda para el sector cafetero colombiano es gobernada por la demanda de carácter internacional y que permanece en aumento hasta su capacidad máxima, dada por el parámetro  $w$ , permitiendo proponer una ecuación diferencial de tipo logístico.

En este modelo se encuentra que para la región donde  $x_2 > x_1 + x_3$  el sistema presenta cuatro puntos de equilibrio, de los cuales dos ( $p_2$  y  $p_4$ ) son los únicos admisibles para el modelo, pues los puntos  $p_1$  y  $p_3$  se obtienen para una oferta con valor negativo, como se mencionó anteriormente.

En los puntos de equilibrio se obtiene uno de tipo silla cuando la demanda es 0, lo que explica que las trayectorias del sistema son salientes en dicho punto. Por otro lado, cuando la demanda toma el valor de la capacidad máxima de la misma, correspondiente a 20 millones de sacos de 60 kg, se obtiene un punto de equilibrio de tipo estable, comportamiento señalado en el retrato de fase (Guardia, *et-al*, 2011).

## REFERENCIAS

- Arias, F. (29 de marzo de 2016). Venta de café mueve \$3,5 billones en Colombia. *El Colombiano*. Recuperado de <http://www.elcolombiano.com/negocios/cafe-consumo-sigue-en-aumento-en-colombia-XM3824624>
- Bernardo, M., Budd, C., Champneys, A. R., & Kowalczyk, P. (2008). *Piecewise-smooth Dynamical systems. Theory and Applications*. London: Springer-Verlag.
- Bernardo, M., Nordmark, A., Olivar, G., Kuznetsov, Y. A., Rinaldi, S., & Gragnani, A. (2007). Discontinuity-induced bifurcations of equilibria in piecewise-smooth and impacting dynamical systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 8, 18. doi: 10.1142/S0218127403007874
- Colombo, A., Bernardo, M., Hogan, S. J., & Jeffrey, M. R. (2012). Bifurcations of piecewise smooth flows: Perspectives, methodologies and open problems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 241(22), 1845-1860. doi: 10.1016/j.physd.2011.09.017
- Domínguez, J. C. (16 de abril de 2012). Reportan aumento de importaciones de café al país. *El Tiempo*. Recuperado de <https://www.eltiempo.com/archivo/documento/DR-43675>.
- Domínguez, J. C. (18 de marzo de 2013). El 80% del café que bebemos es importado. *Portafolio*. Recuperado de <https://www.portafolio.co/negocios/empresas/80-cafe-bebemos-importado-73622>.
- Escobar, C. M. (2013). *Contribución al estudio de los sistemas no suaves* (tesis de doctorado). Universidad Nacional de Colombia, Manizales.
- Federación Nacional de Cafeteros [FNC] (2004). *Comportamiento de la Industria Cafetera Colombiana 2004*. Bogotá: FNC.
- Federación Nacional de Cafeteros [FNC] (2011). *Comportamiento de la Industria Cafetera Colombiana 2011*. Bogotá: FNC.
- Guardia, M., Seara, T. M., & Teixeira, M. A. (2011). Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov Systems. *Journal of Differential Equations*, 250(4), 1967-2023. doi: 10.1016/j.jde.2010.11.016
- International Coffee Organization [ICO]. (2011). *Informe sobre el mercado de café 2011*. London. International Coffee Organization.
- Jiménez-Varón, C. F. (2018). *Dinámica no suave en un modelo de mercado del café de Colombia* (tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Manizales.
- Leine, R. I., & van-Campen, D. H. (2006). Bifurcation phenomena in non-smooth dynamical systems. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 25(4), 595-616. doi: 10.1016/j.euromechsol.2006.04.004
- Lis-Gutiérrez, J. P., Campo-Robledo, J. A., & Herrera-Saavedra, J. P. (2012). *Estudio sobre el sector del Café en Colombia* (número 5, diciembre). Superintendencia de Industria y Comercio.



- Piedrahita-Arcila, I. (2011). Relaciones entre lo local y lo global en un contexto rural colombiano: el caso de Asprocafé Ingrumá. *Diálogos de derecho y política*, 2(7), 1-20.
- Redondo-Ortegón, J. M. (2012). *Modelado de mercados de electricidad* (tesis de doctorado). Universidad Nacional de Colombia, Manizales.
- Tabares-Soto, R. (2016). *Programación paralela sobre arquitecturas heterogéneas* (tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Manizales.
- Uu, E. E., & Nam, V. (2017). *Los precios del café llegan a la cifra más alta en cuatro meses , pero después bajan debido a que el mercado está bien abastecido* (agosto 2017). Londres: OIC.
- Valencia-Calvo, J., Franco-Cardona, C. J., Olivar-Tost, G., & Dyer-Rezonzew, I. (2016). Enfoque metodológico para el estudio y representación de comportamientos complejos en mercados de electricidad. *Ingeniería y Ciencia*, 12(24), 195-220. doi: 10.17230/ingciencia.12.24.9